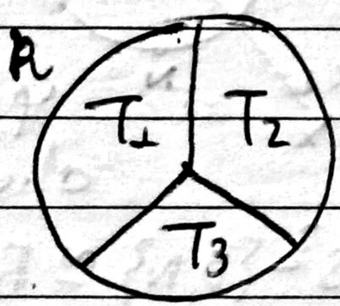
3) Έστω R απλή περιοχή κανονικής επιφάνειας S με σύνορο $\partial R = C$ και εξωτερικές γωνίες $\theta_1, \dots, \theta_m$. Τότε

$$\iint_R K\,d\sigma + \int_{\partial R} k_g + \sum_j \theta_j = 2\pi$$

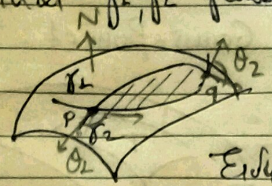
Απόδ.



$\chi(R) = 3 - 6 + 4 = 1.$

αντικαθιστούμε στο θεώρημα (G-B) και παίρνουμε το ζητούμενο

4) Έστω S κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K\leq 0$ και γ_1, γ_2 γεωδαισιακές όπου τέμνονται



Τότε δεν μπορούν να τμηθούν έτσι ώστε να αποτελούν το σύνορο απλής περιοχής

Ειδικά δεν υπάρχουν κλειστές γεωδαισιακές που να είναι το σύνορο απλών περιοχών.

<u>Απόδ</u>

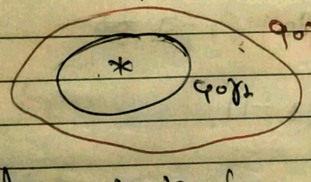
Έστω ότι οι γ_1 και γ_2 τέμνονται και στο q ώστε να είναι το σύνορο απλή περιοχή R. Τότε έχω:

$$\iint_R K\,d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \quad , \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$$

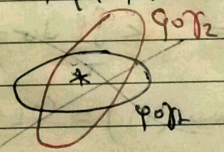
$$0 \geq \iint_R K\,d\sigma = 2\pi - \theta_1 - \theta_2 = \underbrace{(\pi - \theta_1)}_{>0} + \underbrace{(\pi - \theta_2)}_{>0} \quad \text{άτοπο}$$

5) Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K<0$ και <u>S ομοιομορφική με τον κύλινδρο $S \times \mathbb{R}$</u>.

Έστω γ_1, γ_2 απλές κλειστές γεωδαισιακές και $\varphi: S \to \mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ ομοιομορφισμός

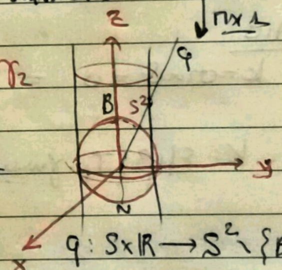


ή



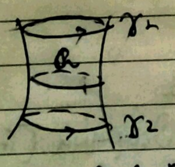
αδύν. από άσκηση 4

<u>πχ1</u>



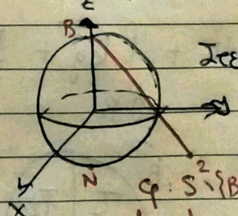
$\varphi: S \times \mathbb{R} \to S^2 \setminus \{B, N\}$ ομοιομορφισμός

Άρα, γ_1, γ_2 δεν τέμνονται λόγω οι εικόνες δεν τέμνονται και φ ομοιομορφισμός



Άρα, από Θ. G-B. έπεται ότι:

<u>πχ2</u>



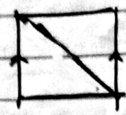
Στερεογραφική προβολή.

$\varphi: S^2 \setminus \{B\} \to \mathbb{R}^2$ ομοιομορφισμός

Σχόλιο: $S^2 \setminus \{B, N\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$

$$\iint_R k\, d\sigma = 2\pi\, \chi(R)$$

$$\chi(R) = \chi(\ ) = 2-4+2=0$$ Άτοπο γιατί $k<0$



Σε μια τέτοια επιφάνεια υπάρχει το πολύ μια απλή, κλειστή γεωδαισιακή

6) Έστω S συμπαγής επιφάνεια με $k>0$

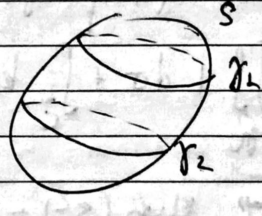
Τότε δυο απλές κλειστές γεωδαισιακές πάντα τέμνονται

Αποδ.

$$\iint_S k\, d\sigma = 2\pi\, \chi(S) \quad (1)$$

$$k>0 \Rightarrow \iint_S k\, d\sigma > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \chi(S)>0 \Rightarrow \chi(S) = 2 = \chi(S^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S \cong S^2$. Υποθέτω γ_1, γ_2 είναι απλές κλειστές γεωδαισιακές που δεν τέμνονται.



Επειδή $S \cong S^2$ οι γ_1 & γ_2 είναι το σύνορο κανονικής περιοχής R όπου:

$R \cong$ 

Από θεώρημα G-B λοιπόν έχω ότι:

$$\iint_R k\, d\sigma + \cancel{\int_{\gamma_1} k_g} + \cancel{\int_{\gamma_2} k_g} = 2\pi\, \chi(R)$$

$$\chi(R) = \chi(\ ) \overset{\text{Πριν}}{=} 0$$ άτοπο αφού $k>0$.

7) $\iint_S k\, d\sigma = 2\pi \chi(S)$

$S = S^2(R)$, $k = \frac{1}{R^2}$, $\chi(S^2) = 2$

$\frac{1}{R^2}\iint_S d\sigma = 4\pi \Leftrightarrow$ Εμβ$(S^2(R)) = 4\pi R^2$

8) <u>Θεώρημα Jacobi</u>

Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα $k(s)>0$ $\forall s \in [0,L]$. Θεωρώ καμπύλη $\tilde{c}(s) = \vec{n}(s)$ όπου $\vec{n}(s)$ το κύριο κάθετο. Αν η $\tilde{c}$ απλή τότε χωρίζει την S^2 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

<u>Απόδ</u>

Από το Θεώρημα Jordan μπορώ να υποθέσω ότι η $\tilde{c}$ είναι το σύνολο μιας απλής περιοχής της S^2. Από Εφαρμογή έχω

$$\iint_R 1\, d\sigma + \int_{\tilde{c}} k_g = 2\pi \Leftrightarrow \text{Εμ}(R) + \int_{\tilde{c}} k_g = 2\pi$$

Αφού Εμβ$(S^2) = 4\pi$ τότε αρκεί νδο $\int_{\tilde{c}} k_g = 0$. Το μήκος τόξου $\bar{s}$ της $\tilde{c}$ είναι

$$\tilde{s} = \int_0^s \left\| \frac{d\tilde{c}}{ds} \right\| d\sigma = \int_0^s \left\| \frac{d\vec{n}}{ds} \right\| = \int_0^s \| \dot{\vec{n}} \| ds =$$

$$= \int_0^s \| -k\vec{t} + \tau \vec{b} \| d\sigma \Rightarrow$$

<u>Συμπέρασμα</u>: $\tilde{s} = \int_0^s \sqrt{k^2+\tau^2}\, d\sigma$.

Ορίζουμε ότι $k_g =: \langle \ddot{\tilde{c}}, N \times \dot{\tilde{c}} \rangle$

$$k_g^{\tilde c} = \left\langle \frac{d^2\tilde c}{d\tilde s^2}, N\times\frac{d\tilde c}{d\tilde s}\right\rangle,$$ όπου $N: S^2\to S^2$ απεικόν. Gauss του S^2.

$N(x,y,z)=(x,y,z)$ και άρα $N\circ\tilde c=\tilde c$

$$k_g^{\tilde c} = \left\langle \frac{d^2\tilde c}{d\tilde s^2}, \tilde c\times\frac{d\tilde c}{d\tilde s}\right\rangle \quad (*)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde c}{d\tilde s} = \frac{ds}{d\tilde s}\cdot\frac{d\tilde c}{ds}}, \quad \frac{d^2\tilde c}{d\tilde s} = \frac{d^2 s}{d\tilde s^2}\cdot\frac{d\tilde c}{ds} + \frac{ds}{d\tilde s}\left(\frac{d\tilde c}{ds}\right)^{\cdot} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\tilde c}{d\tilde s^2} = \frac{d^2 s}{d\tilde s^2}\cdot\frac{d\tilde c}{ds} + \left(\frac{ds}{d\tilde s}\right)^2\frac{d^2\tilde c}{ds^2}}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (*) παίρνουμε

$$k_g^{\tilde c} = \left(\frac{ds}{d\tilde s}\right)^3\left\langle \frac{d^2\tilde c}{ds^2}, \tilde c\times\frac{d\tilde c}{ds}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}^{\,3}}\left\langle \ddot{\vec n}, \vec n\times\dot{\vec n}\right\rangle \quad (1)$$

$$\dot{\vec n} = -k\cdot\vec t+\tau\vec b$$
$$\ddot{\vec n} = -\dot k\vec t - k\dot{\vec t} + \dot\tau\vec b + \tau\dot{\vec b} = -\dot k\vec t - k^2\vec n + \dot\tau\vec b - \tau^2\vec n.$$
$$\ddot{\vec n} = -\dot k\vec t - (k^2+\tau^2)\vec n + \dot\tau\vec b$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

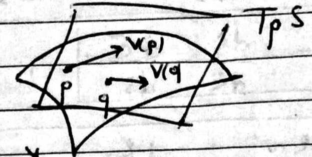
$$k_g^{\tilde c} = \left(\frac{ds}{d\tilde s}\right)^2\left(k\dot\tau - \tau\dot k\right) = \frac{ds}{d\tilde s}\,\frac{k\dot\tau-\tau\dot k}{k^2+\tau^2} = \left(\arctan\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot}\frac{ds}{d\tilde s}$$

Αλλαγή μεταβλητής

$$\int_{\tilde c} k_g\, d\tilde s = \int_0^L k_g\frac{d\tilde s}{ds}\, ds = \int_0^L \left(\arctan\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot} ds = 0$$ c περιοδική

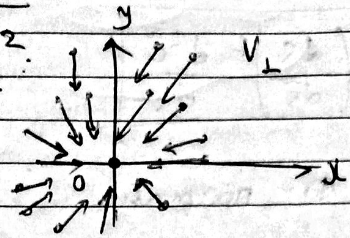
Διανυσματικά Πεδία σε επιφάνειες

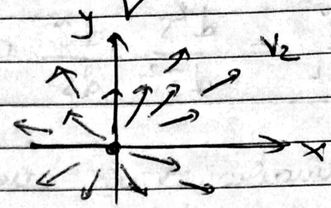
Ορισμός: καλούμε δ.π κανονικής επιφάνειας S κάθε απεικόνιση $V: S \to \mathbb{R}^3$ τ/ω $\forall p \in S : V(p) \in T_pS$



Παράδειγμα

Στο $\mathbb{R}^2$:



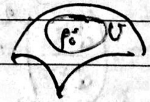


Θεωρώ τα δ.π $V_1(x,y) = (-x,-y)$

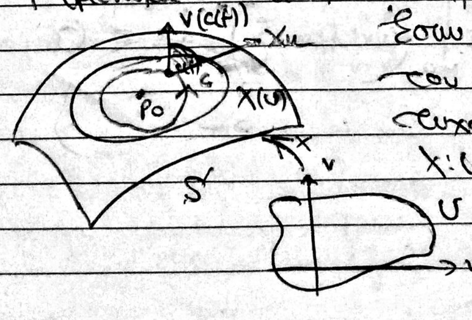
$V_2(x,y) = (x,y)$

Ορισμός:
Το σημείο $p_0 \in S$ καλείται ιδιάζον σημείο του διανυσματικό πεδίο $V \Leftrightarrow V(p_0)=0$

Θα μελετήσουμε δ.π τα οποία έχουν ιδιάζοντα σημεία μεμονωμένα, δηλ $\forall$ ιδιάζον σημείο p_0 του δ.π. V $\exists$ $U=U(p_0) \subset S$ περιοχή τ/ω το p_0 είναι το μοναδικό ιδιάζον σημείο του V στην περιοχή U.



Δείκτης διανυσματικού πεδίου σε καθε- μεμονωμένο ιδιάζον σημείο.



Έστω p_0 ιδιάζον μεμονωμένο σημείο του δ.π V επιφάνειας S. Θεωρώ τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ και απλή κλειστή καμπύλη $c: [0,L] \to X(U)$ που είναι το ∂R, R: καν. περιοχ.

Θεωρώ τη γωνιακή συνάρτηση $\varphi(t) = \sphericalangle(X_u, V)\big|_{C(t)}$

$V(C(0)) = V(C(\ell)) \Rightarrow \varphi(\ell) - \varphi(0) = 2I\pi, \ I \in \mathbb{Z}$

<u>Ορισμός</u>: Ο ακέραιος αριθμός με την ιδιότητα $\varphi(\ell) - \varphi(0) = 2I\pi$ καλείται δείκτης του δ.π. V, για το ιδιάζον σημείο του p_0. Συμβολίζεται με

$$\mathrm{Ind}(V, p_0) = \frac{\varphi(\ell) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Ανεξαρτησία του δείκτη από το σύστημα συντεταγμένων.

Θεωρώ w_0 εφαπτόμενο διάνυσμα στο $C(0)$ ($w_0 \in T_{C(0)}S$) με $\|w_0\| = 1$ και θεωρώ δ.π. $W(t)$ κατά μήκος της C που είναι η παράλληλη μεταφορά του w_0, δηλαδή

$$\begin{cases} \dfrac{Dw}{dt}(t) = 0 \\ W(0) = w_0 \end{cases}$$

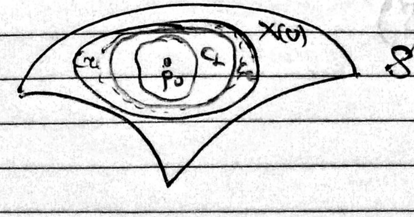
$$\left[\frac{Dw}{dt}(t)\right] = \dots \xRightarrow[\text{Gauss Green}]{\text{Έξοχο θεωρ.}} \psi = \sphericalangle(W, X_u)$$

$$\psi(\ell) - \psi(0) = \iint_R k\, d\sigma$$

$$\psi - \varphi = \sphericalangle(W, V)$$

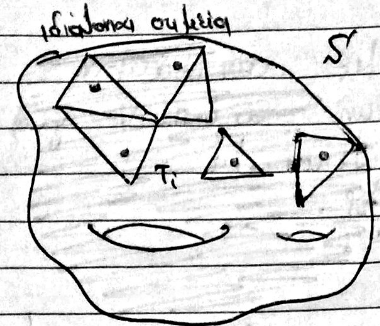
$$\Delta(\psi - \varphi) = \Delta\psi - \Delta\varphi = \iint_R k\, d\sigma - 2\pi\, \mathrm{Ind}(V, p_0)$$

Ανεξαρτησία του δείκτη από την καμπύλη



Δίχως περαιτέρω ανάλυση,
C_1, C_2 ομοτοπικές

Έστω S συμπαγής επιφάνεια και V δπ αυτής με μεμονωμένα ιδιάζοντα σημεία



Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο των ιδιαζόντων σημείων του V είναι πεπερασμένο.
Έστω $\{p_1, \dots, p_k\}$ τα ιδιάζοντα σημεία.

Τριγωνοποιούμε την S

$$\iint_{T_i} k\,d\sigma - 2\pi\, \mathrm{Ind}(V, p_i) = \Delta(\psi - \varphi) \xRightarrow{\text{αθροίζω}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i \iint_{T_i} k\,d\sigma}_{\text{ολική καμπυλότητα Gauss}} - 2\pi \sum_i \mathrm{Ind}(V, p_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S k\,d\sigma = 2\pi \sum_i \mathrm{Ind}(V, p_i)$$

$$\text{G-B} \rightarrow \iint_S k\,ds = 2\pi\, \chi(S)$$

Αποδείξαμε το Θεώρημα Poincaré:

<u>Θεώρημα (Poincaré)</u>

Για κάθε συμπαγή επιφάνεια S και διαν. πεδίο V με ιδιάζοντα σημεία $p_1, \dots, p_k$ ισχύει

$$\sum_i \mathrm{Ind}(V, p_i) = \chi(S)$$